ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

$(x,y)\in D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}$

Να εξετάσετε αν η $f: D\to\mathbb{R}$ έχει ολικό μέγιστο και ελάχιστο. Έπειτα, να βρείτε (αν υπάρχουν) τα σημεία ολικού μεγίστου και ελαχίστου

ΛΥΣΗ

$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2} \iff f^2(x,y)=1-x^2-y^2 \iff$

$\iff f^2(x,y)+x^2+y^2=1 \iff z^2+x^2+y^2=1$

Βλέπαμε, $f(0,0)=1$ ενώ $f(x,y)<1$, $\forall (x,y)\in D\setminus\{(0,0)\}$

άρα το μοναδικό μέγιστο που υπάρχει είναι το $(0,0)$

Τα σημεία $(x,y)\in\partial D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ είναι και (τα μοναδικά) σημεία ολικού ελαχίστου αφού για $(x,y)\in\partial D$ έχουμε $f(x,y)=0$ ενώ για

$(x,y)\in \mathring{D}=D\setminus\partial D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$

έχουμε $f(x,y)=\sqrt{\underbrace{1-(\underbrace{x^2+y^2}_{\in[0,1]})}_{\in(0,1]}}\in(0,1]$, $f(x,y)>0$

Εξάλλου $\forall(x,y)\in D : 0\le f(x,y)\le 1$

Παρατήρηση:

Το D είναι κλειστό αφού $\mathbb{R}^2 \setminus D$ ανοιχτό (θέλει απόδειξη)

Το D κλειστό: Έστω $(x_\nu, y_\nu) \in D$, $\nu \in \mathbb{N}$

$(x_\nu, y_\nu) \to (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$x_\nu \to x_0 \wedge y_\nu \to y_0$

$x_\nu^2 + y_\nu^2 \to x_0^2 + y_0^2$

Επίσης, η $f: D \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής

Η $g: D \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = 1-(x^2+y^2)$ είναι συνεχής

Η $f(x,y) = \sqrt{g(x,y)}$ συνεχής αφού

η $z \to \sqrt{z}$ είναι συνεχής για $z \geq 0$

δηλ. $\forall z_\nu \to z_0 : \sqrt{z_\nu} \to \sqrt{z_0}$ άρα

$\forall (x_\nu, y_\nu) \to (x_0, y_0)$ έχουμε

$g(x_\nu, y_\nu) \to g(x_0, y_0)$ αφού g συνεχής $\Rightarrow$

$z_\nu \to z_0$

$$\Rightarrow f(x_\nu, y_\nu) = \sqrt{g(x_\nu, y_\nu)} \to \sqrt{g(x_0, y_0)} = f(x_0, y_0)$$

άρα η f συνεχής.

Η συνάρτηση $\tilde{f} : \mathring{D} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$\tilde{f}(x,y) = f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$

με $\mathring{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$. Αυτή δεν λαμβάνει ελαχ.

($\Leftrightarrow$ δεν έχει σημείο ελαχίστου στο $\mathring{D}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \nexists x_0 \in \mathring{D} : \forall x \in \mathring{D} : f(x) > f(x_0)$)

αφού $(\underbrace{x_\nu, y_\nu}_{\in D^\circ}) \to (x_0, y_0) \in \partial D$ τότε έχουμε

$h(x_\nu, y_\nu) \to 0 \neq h(x,y) \; \forall (x,y) \in \mathring{D}$

πχ

$(1-\frac{1}{\nu}, 0) \to (1,0)$

$h(1-\frac{1}{\nu}, 0) = \sqrt{1-(1-\frac{1}{\nu})^2} = 0$ άρα $h(1-\frac{1}{\nu}, 0) \to 0$

(42)

Π.χ

Η $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τυπο $h(x,y) = x^2+y^2$
λαμβανει ολ. ελαχ. στο μοναδικο σημειο ελαχιστου $(0,0)$
αφου $h(x,y) > h(0,0)$, $\forall (x,y) \neq (0,0)$
Δεν λαμβάνει μεγιστο αφου για $(x_\nu, y_\nu) = \left(\frac{\nu}{\sqrt{2}}, \frac{\nu}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow h(x_\nu, y_\nu) = \nu^2 \longrightarrow +\infty$

ΑΣΚΗΣΗ

Εστω η συναρτηση

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}, \quad x \neq y$$

Για ποια $x_0 \in \mathbb{R}$, $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$;